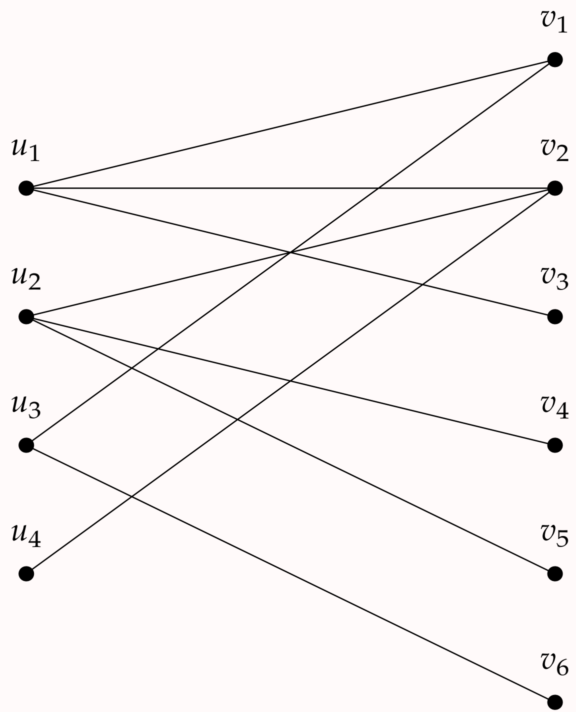
LYCÉE LECONTE DE LISLE

Calcul d'un couplage maximal dans un graphe biparti

Vincent Picard

Un exemple de graphe biparti

- On veut calculer un couplage maximal pour le graphe :

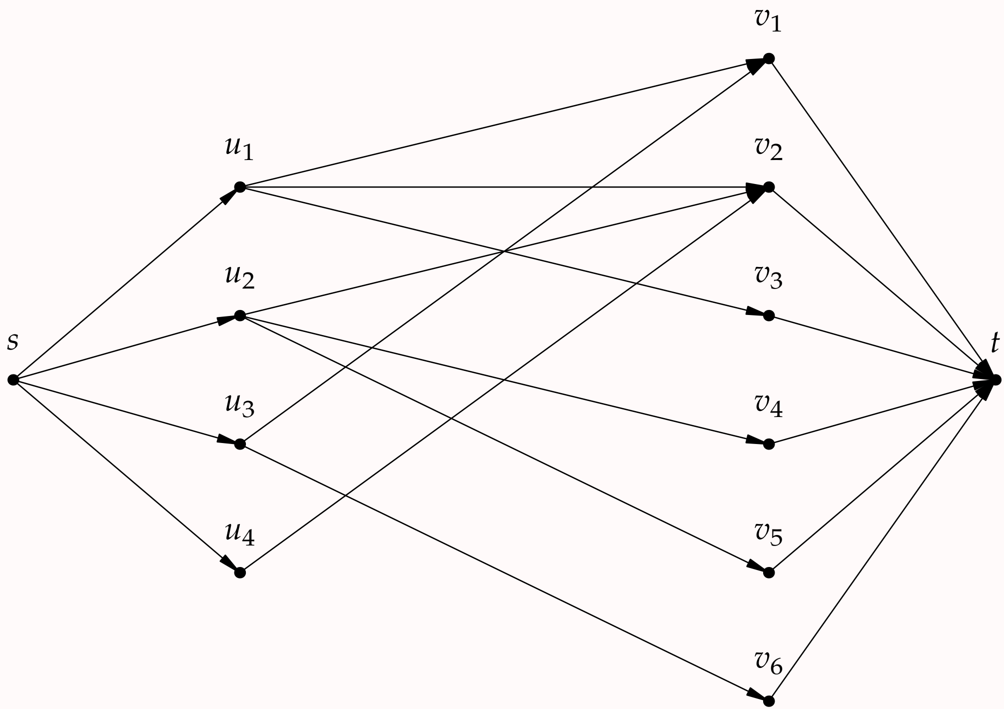


Graphe résiduel

- Étant donné un graphe biparti $G = (U \cup V, A)$ et un couplage M, le calcul des **chemins augmentants** se fait facilement à l'aide du graphe résiduel :
  - C'est un graphe orienté construit à partir des sommets de G
  - On ajoute un sommet source s et un sommet cible t
  - Si $(u, v) \notin M$ alors (u, v) est un **arc** du graphe résiduel.
  - Si $(u, v) \in M$ alors (v, u) est un **arc** du graphe résiduel.
  - s pointe sur tous les sommets de U non appariés
  - t est pointé par tous les sommets de V non appariés
  - **un chemin augmentant correspond donc à un chemin de s à t**

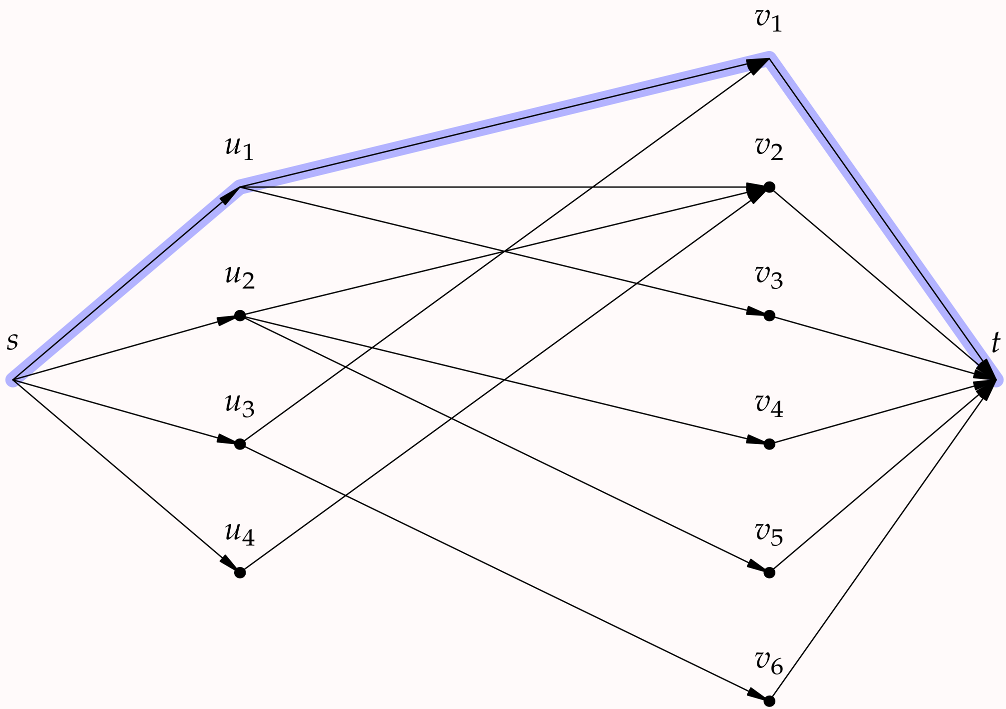
Graphe résiduel : exemple

- Au départ $M = \varnothing$ et le graphe résiduel est :



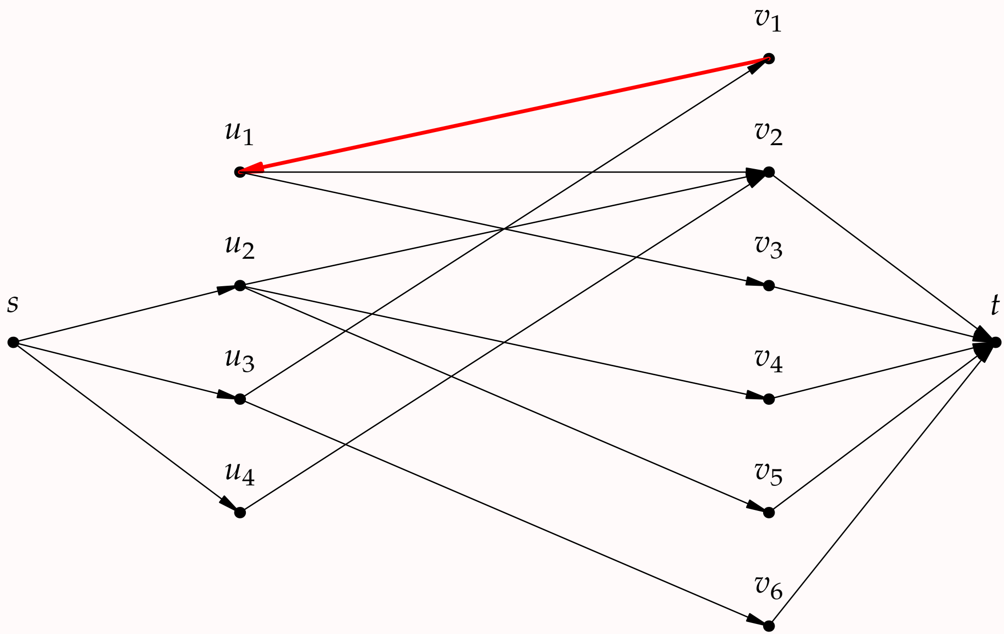
Graphe résiduel : un chemin augmentant

- Un **chemin augmentant** correspond à un chemin de s à t :



Graphe résiduel : mise à jour du graphe résiduel

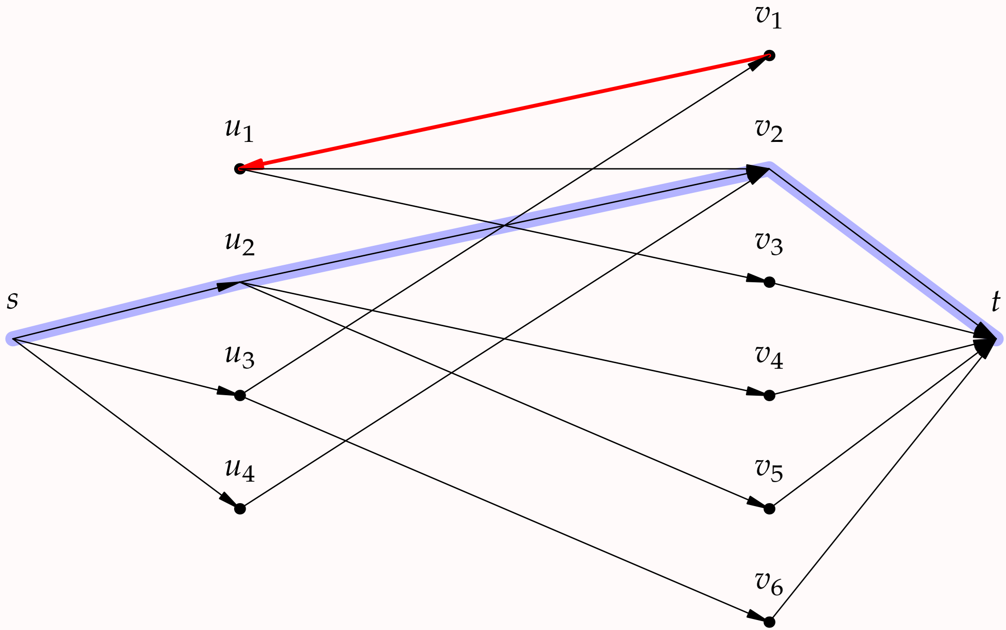
- On calcule le nouveau couplage obtenu $M \leftarrow M \Delta C$.



- $M = \{(u_1, v_1)\}$

Graphe résiduel : étape 2

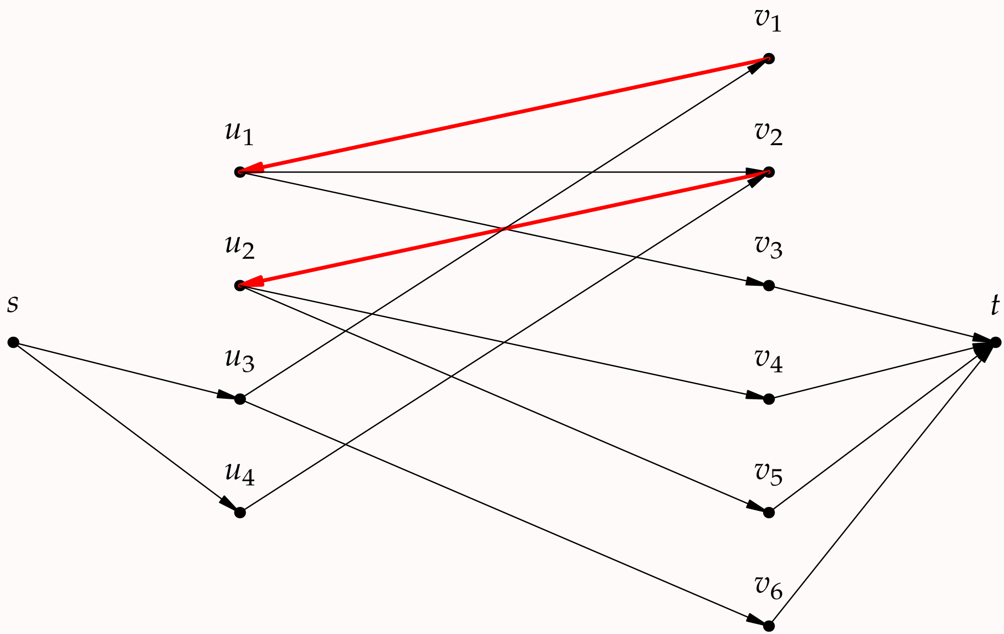
- Le couplage peut encore être amélioré :



- $M = \{(u_1, v_1)\}$

Graphe résiduel : étape 2

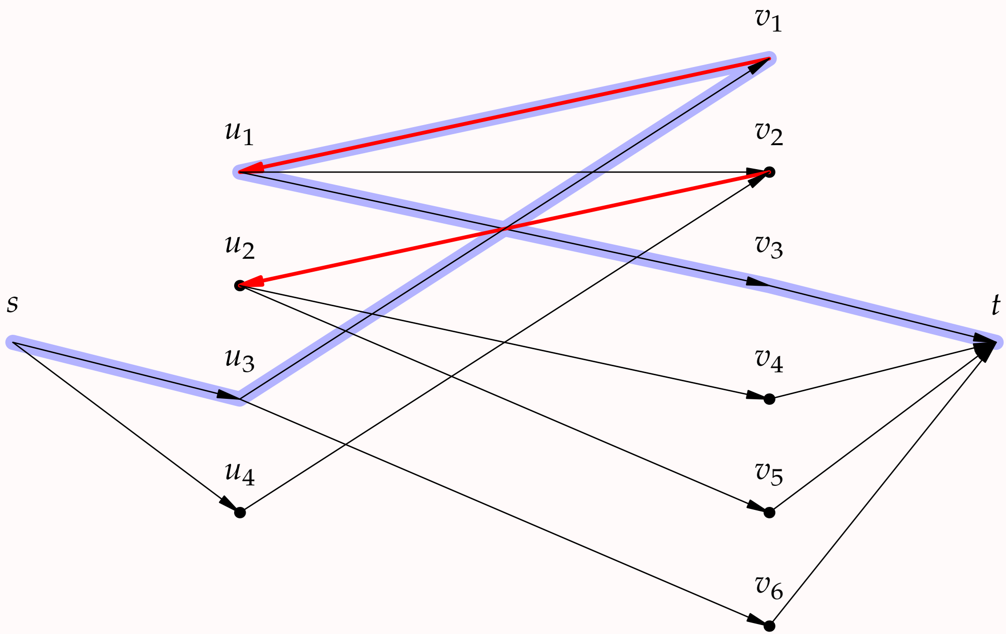
- On met à jour le couplage $M \leftarrow M \Delta C$:



- $M = \{(u_1, v_1), (u_2, v_2)\}$

Graphe résiduel : étape 3

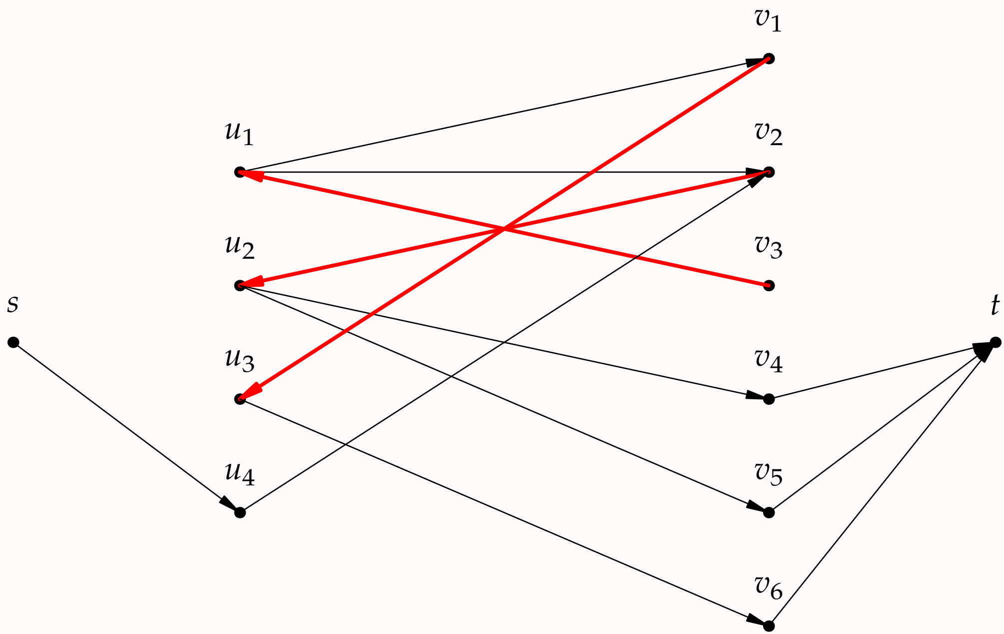
- Le couplage peut encore être amélioré :



- $M = \{(u_1, v_1), (u_2, v_2)\}$

Graphe résiduel : étape 3

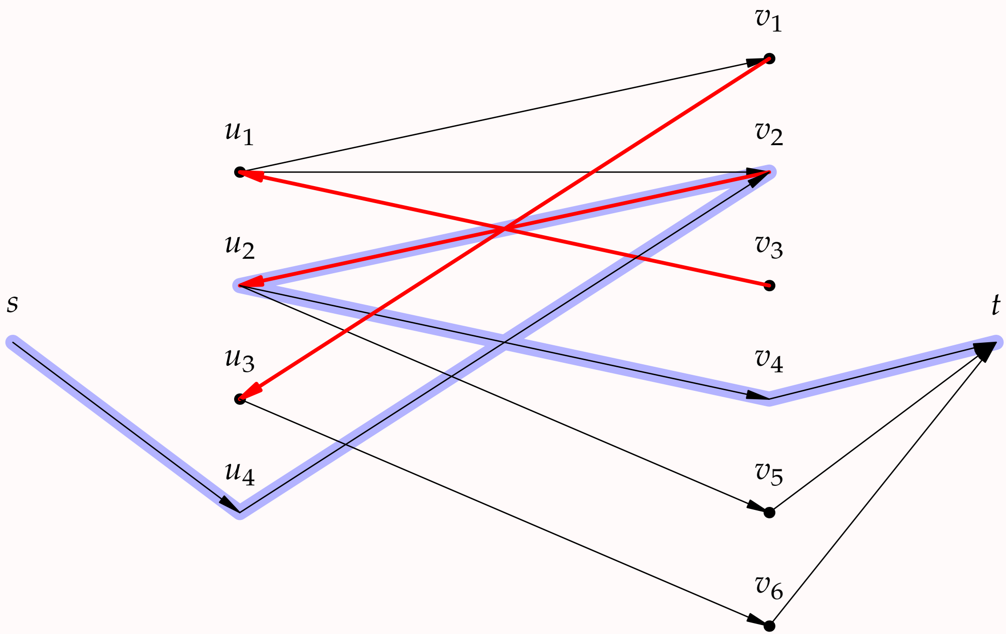
- On met à jour le couplage $M \leftarrow M \Delta C$:



- $M = \{(u_1, v_3), (u_2, v_2), (u_3, v_1)\}$

Graphe résiduel : étape 4

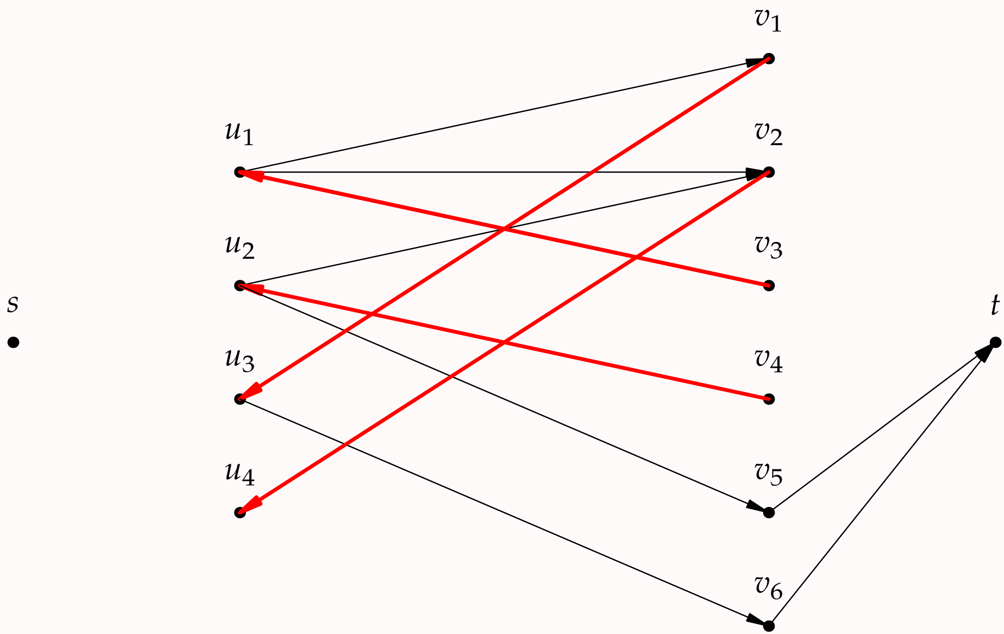
- Le couplage peut encore être amélioré :



- $M = \{(u_1, v_3), (u_2, v_2), (u_3, v_1)\}$

Graphe résiduel : étape 4

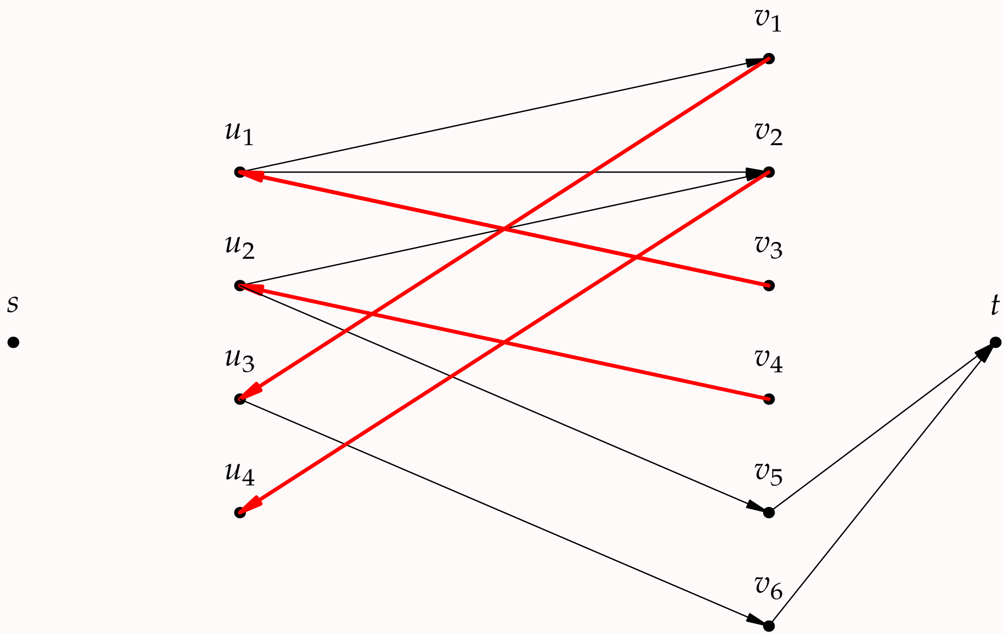
- On met à jour le couplage $M \leftarrow M \Delta C$:



- $M = \{(u_1, v_3), (u_2, v_4), (u_3, v_1), (u_4, v_2)\}$

Graphe résiduel : fin

- Il n'y a plus de chemin augmentant : le couplage obtenu est maximal !



- $M = \{(u_1, v_3), (u_2, v_4), (u_3, v_1), (u_4, v_2)\}$

Conclusions

- Un couplage s'obtient en partant du couplage vide et en cherchant des **chemins augmentants** dans le graphe.
- Dans un graphe biparti, le calcul des chemins augmentants peut s'obtenir à l'aide du **graphe résiduel**
- Chaque chemin augmentant augmente la taille du couplage de 1.
- Complexité pire cas :
  - Parcours de graphe : $O(|U| + |V| + |A|)$ (linéaire)
  - Nombre d'itérations : $|U|$ dans le pire cas...
  - Complexité : $O(|U| \times (|U| + |V| + |A|))$
  - Si $n = |U| + |V|$ on obtient une complexité cubique $O(n^3)$ dans le pire cas.