TD 1 : Langages et expressions régulières

Exercice 1

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant (L, L_1 et L_2 sont des langages).

1. Si L est fini alors L est régulier.
2. Si L est infini alors L n'est pas régulier.
3. Si L est régulier alors il est stable par concaténation, c'est-à-dire que $\forall u \in L,\ \forall v \in L,\ u.v \in L$.
4. Si L_1 est un langage régulier et si $L_2 \subset L_1$ alors L_2 est aussi régulier.
5. Si L_1 est un langage non régulier et si $L_1 \subset L_2$ alors L_2 n'est pas régulier.
6. Si L_1 est un langage régulier et $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier alors L_2 est un langage non régulier.

Exercice 2

Soit $\Sigma = \{a, b\}$. On note L_1 le langage des mots commençant par ab, c'est-à-dire les mots ayant pour *préfixe* ab. On note L_2 le langage des mots finissant par ba, c'est-à-dire les mots ayant pour *suffixe* ba.

1. Justifier que L_1 est régulier :
   a. en donnant une construction ensembliste;
   b. en le dénotant par une expression régulière.
2. De même, justifier que L_2 est régulier de deux manières différentes.
3. Donner 3 justifications que $L_1 \cap L_2$ est régulier.

Exercice 3

Soit $\Sigma = \{a, b\}$. Soit L le langage des mots dans lesquels toute lettre a est suivie d'une lettre b.

1. Donner $L \cap \Sigma^5$.
2. Démontrer que l'expression régulière $e = (ab \mid b)*$ dénote le langage L.

Exercice 4

Soit $\Sigma = \{a, b\}$. Justifier que les langages suivants sont rationnels en donnant une expression régulière.

1. Mots contenant le facteur aaa.
2. Mots ne contenant pas le facteur aaa.
3. Mots de longueur impaire.
4. Mots dont la longueur est un multiple de 3.
5. Mots où tout a est précédé d'un b.
6. Mots dans lesquels toute série de a est de longueur paire.
7. Mots contenant un nombre pair de a.

Exercice 5

Racine carrée d'un langage

Soit Σ un alphabet. Soit L un langage sur Σ, on appelle *racine de* L le langage défini par :

$$\sqrt{L} = \{u \in \Sigma^* \ / \ u.u \in L\}$$

1. Comparer L et $\sqrt{L^2}$
2. Comparer L et $\sqrt{L}^2$

Exercice 6

1. Soit $u, v \in \Sigma^*$ deux préfixes d'un mot $w \in \Sigma^*$. Montrer que u est préfixe de v ou v est préfixe de u.
2. Soit a, b deux lettres d'un alphabet Σ et $u \in \Sigma^*$ un mot tel que $au = ub$. Démontrer que $a = b$ et que $u \in \{a\}^*$.

Exercice 7

Symbole ∅ dans une expression régulière

Soit L un langage dénoté par une expression régulière e tel que $L \neq \varnothing$. Démontrer qu'il existe une expression régulière e' ne contenant pas le symbole $\varnothing$ et équivalente à e (c'est-à-dire que $\mu(e) = \mu(e')$).

⋆Exercice 8

Mots qui commutent

Soit $u, v \in \Sigma^*$.

1. Montrer que s'il existe $t \in \Sigma^*$ tel que $u \in \{t\}^*$ et $v \in \{t\}^*$ alors $uv = vu$.
2. Réciproquement, démontrer que si $uv = vu$ alors il existe $t \in \Sigma^*$ tel que u et v sont des puissances de t.
3. Un compositeur écrit deux chansons A et B. Il demande à un interprète de chanter A puis B sans aucune interruption. L'intérprète réalise alors un premier spectacle, puis un second où il se mélange les pinceaux et chante B avant A. Un spectateur ayant assisté aux deux spectacles affirme n'avoir entendu aucune différence. Que dire de ces deux chansons ?

⋆Exercice 9

Mots ayant des puissances égales

Soit u et v deux mots de Σ^*. On suppose qu'il existe deux entiers naturels non nuls p et q tels que $u^p = v^q$. Montrer qu'il existe deux entiers m et n et un mot $w \in \Sigma^*$ tels que $u = w^m$ et $v = w^n$. La réciproque est-elle vraie ?
Indication : Utiliser le résultat de la question 2 de l'exercice précédent.

⋆Exercice 10

Existence de langages non réguliers

Soit Σ un alphabet non vide. On rappelle qu'un ensemble E est dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$.

1. Justifier que Σ^* est dénombrable.
2. Soit X un ensemble. Démontrer qu'il n'existe pas de surjection $j : X \to \mathfrak{P}(X)$. **Indication :** si une telle application existe on pourra considérer la partie $A = \{x \in X \ / \ x \notin j(x)\}$
3. Démontrer que l'ensemble des langages sur l'alphabet Σ est infini mais non dénombrable.
4. Démontrer que $\text{REGEXP}(\Sigma)$ est infini dénombrable.
5. En déduire qu'il existe des langages non réguliers.