TD : Couverture sommets

Exercice 1

On considère le problème VERTEX-COVER (couverture sommets) :
Instance : un graphe G non orienté et un entier K
Question : existe-t-il un choix de K sommets au plus dans G tel que toutes les arêtes touchent un des sommets choisis ?
On appelle un tel ensemble de sommets une couverture de G.

1. Démontrer soigneusement que VERTEX-COVER est un problème dans **NP**.
2. On considère $\overline{G}$ le graphe complémentaire de $G = (S, A)$ défini par $\overline{G} = (S, S^2 \setminus A)$ (sans compter les boucles). Démontrer qu'il existe un algorithme de transformation en temps polynomial de G en $\overline{G}$.
3. On considère le problème suivant appelé CLIQUE:
   Instance : un graphe G non orienté et un entier K
   Question : existe-t-il une clique de taille K dans G ?
   Démontrer que CLIQUE est dans NP. On admettra ensuite que CLIQUE est NP-complet (vu en cours).
4. Tracer un graphe à 6 sommets en forme d'hexagone. Déterminer une couverture sommets de taille 3. Montrer que $\overline{G}$ contient une clique de taille 3.
5. Démontrer qu'un graphe possède une couverture de taille K au plus si et seulement si $\overline{G}$ contient une clique de taille $n - K$ avec n le nombre de sommets de G.
6. Démontrer que VERTEX-COVER est un problème NP-complet.
7. On considère le problème suivant :
   Instance : un graphe G non orienté
   Question : Quel est le nombre minimal de sommets à considérer pour obtenir une couverture sommets de G ?
   Que dire de ce problème ? Est-ce un problème difficile ? Est-il NP-complet ?
8. On considère le probleme SET-COVER suivant :
   Instance : Un ensemble de n éléments $\{x_1, \ldots, x_n\}$ et un ensemble U de m parties de $\{x_1, \ldots, x_n\}$, un entier K
   Question : existe-t-il une sous-famille de U possédant au plus K ensembles et qui contient tous les éléments $\{x_1, \ldots, x_n\}$?
9. Démontrer que SET-COVER est NP-complet.