TD : logique propositionnelle

Exercice 1

Dire si les textes ci-dessous sont des formules propositionnelles au sens strict. Si oui, représenter la formule sous forme d'arbre.

1. $(x \to (y \to z))$
2. $((x > 0) \land (x < 2))$
3. $((x = y) \to (x \to y))$
4. $((a \land (a \to b)) \to b)$
5. $(x \lor y \lor z)$
6. $(\top \to (a \leftrightarrow b))$

Exercice 2

Dresser la table de vérité des formules suivantes. Lesquelles sont des tautologies ? des antilogies ?

1. $(a \to (b \to a))$
2. $((p \land (p \to q)) \to q)$
3. $((\neg a \to \neg b) \land \neg(b \to a))$
4. $((x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z)))$

Exercice 3

Soit la formule

$$F = ((p \lor q) \to (\neg(\neg r \lor p)) \leftrightarrow q))$$

1. Établir la table de vérité pour F et $\neg F$.
2. En déduire une forme normale disjonctive équivalente à $\neg F$.
3. En utilisant les lois de De Morgan, trouver une forme normale conjonctive équivalente à F.
4. Retrouver le résultat précédent directement à partir de la table de vérité de F.

Exercice 4

Un *système complet de connecteurs* $\mathcal{C}$ est un ensemble de connecteurs logiques (et leur sémantique associée) tel que pour toute formule propositionnelle F il existe une formule G n'utilisant que des connecteurs de $\mathcal{C}$ et telle que $F \equiv G$.

1. Justifier que $\{\land, \lor, \neg\}$ est un système complet de connecteurs.
2. Montrer que $\{\land, \neg\}$ est un système complet de connecteurs.
3. On introduit un nouveau connecteur $\uparrow$ (aussi appelé *non-et*) dont la sémantique est donnée par :

x	y	$(x \uparrow y)$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

Montrer que $\{\uparrow\}$ est un système complet de connecteurs.

Cet exercice montre qu'il est possible d'implémenter n'importe quelle fonction logique dans un circuit électronique en utilisant uniquement des portes `NAND`.

Exercice 5

Montrer qu'une formule ne contenant que la variable x (éventuellement plusieurs fois) et n'utilisant que les connecteurs $\land$ et $\lor$ ne peut être équivalente à la formule $\neg x$. Qu'en déduire ?

Exercice 6

Antoine, Ponyo et Morgane font une partie de cartes. Très vite les choses dégénèrent et ils viennent vous voir en quête de justice.
Antoine : "Je ne triche pas, mais je sais qu'au moins l'un des deux autres triche..."
Morgane : "Si Ponyo triche alors Antoine triche aussi !"
Ponyo : "Morgane triche et Antoine ne triche pas."

- On note A, M et P les variables propositionnelles représentant respectivement le fait qu' Antoine, Morgane et Ponyo trichent. Formuler les 3 énoncés ci-dessus sous forme de 3 formules de la logique propositionnelle F_A, F_M et F_P s'exprimant en fonction des variables A, M et P.

Par votre grande sagesse et votre compréhension profonde de l'esprit humain, vous savez que les tricheurs sont également des menteurs tandis que les joueurs honnêtes disent toujours la vérité. Autrement dit une personne est un menteur si et seulement si elle triche.

- Exprimer cette règle, sous forme d'une formule de la logique propositionnelle R exprimée en fonction des variables A, M, P et des formules F_A, F_M et F_P.

- En utilisant une table de vérité, montrer que la formule R n'admet qu'un seul modèle. Conclure.

Exercice 7

On souhaite résoudre le mini-sudoku suivant.

	3		1
1		3	2
3		1	
	1		3

On introduit un ensemble de variables propositionnelles $x_{i,j,k}$ telles que $x_{i,j,k}$ représente la présence du chiffre k dans la case de coordonnées (i, j).

1. Combien y a-t-il de variables propositionnelles ?
2. Établir une formule $M_{i,j}$ signifiant que la case de coordonnées (i, j) contient un et un seul chiffre.
3. Établir une formule L_i signifiant que la ligne i contient au moins une occurrence de chaque chiffre.
4. Établir de même une formule C_j signifiant que la colonne j contient au moins une occurrence de chaque chiffre.
5. Établir de même 4 formules Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 exprimant la règle concernant les sous-grilles 2×2.
6. En déduire que la résolution du Sudoku revient à résoudre une instance du problème SAT que l'on précisera.