TD : Grammaires non contextuelles

Exercice 1

Soit $\Sigma = \{a, b\}$. Proposer des grammaires algébriques qui engendrent les langages suivants. Justifier.
1. $L_1 = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
2. $L_2 = \{u \mid |u|_a = |u|_b\}$.
3. $L_3 = \{u \mid |u|_a \geq |u|_b\}$.
4. $L_4 = \{u \mid u = \overline{u}\}$ (palindromes).
5. $L_5 = \{$mots ayant au moins deux fois plus de a que de b$\}$

À l'aide du lemme de l'étoile, il est possible de montrer que tous ces langages sont non réguliers.

Exercice 2

Stabilités des langages non contextuels

1. Démontrer que l'union de deux langages hors contexte est un langage hors contexte.
2. Démontrer que la concaténation de deux langages hors contexte est un langage hors contexte.
3. Démontrer que l'étoile d'un langage hors contexte est un langage hors contexte.
4. Démontrer que si L est non contextuel alors $\overline{L}$ est non contextuel
5. Démontrer que $L_1 = \{a^n b^n c^m \mid (n, m) \in \mathbb{N}^2\}$ et $L_2 = \{a^n b^m c^m \mid (n, m) \in \mathbb{N}^2\}$ sont non contextuels. Exprimer $L_1 \cap L_2$. On peut montrer (hors programme) que ce langage n'est pas un langage non contextuel.

Exercice 3

On considère la grammaire G suivante :

$$S \to S + S \mid S \times S \mid C \mid (S)$$

$$C \to 0 \mid 1 \mid 0C \mid 1C$$

1. Décrire intuitivement le langage engendré par G.
2. Montrer que G est ambiguë.
3. Construire une grammaire non ambiguë G' équivalente à G.

Exercice 4

Mots de Motzkin

On se place dans le plan $\mathbb{N}^2$ et on considère les déplacements élémentaires suivants :
- $a = (+1, +1)$,
- $b = (+1, -1)$,
- $c = (+1, 0)$

Un chemin est un mot sur Σ, il représente une trajectoire débutant en $(0, 0)$ et définie par la succession de déplacements élémentaires correspondant aux lettres du mot. Un chemin est valide s'il mène de $(0, 0)$ à $(n, 0)$ en restant bien dans l'espace $\mathbb{N}^2$.

1. Donner une grammaire pour décrire l'ensemble des chemins valides.
2. Démontrer que l'ensemble des chemins valides n'est pas régulier.

Exercice 5

Ambiguïté et dérivations gauches

Soit $G = (\Sigma, V, S, \mathcal{R})$ une grammaire algébrique, justifier les propositions suivantes :
1. Si $u \in \mathcal{L}(G)$ alors $S \Rightarrow_g^* u$.
2. Si G est non ambiguë et $u \in \mathcal{L}(G)$ alors il existe **une unique** suite de dérivations gauches $S \Rightarrow_g^* u$.
3. En déduire que $S \to \varepsilon \mid SS \mid aSb$ est ambiguë.

Remarque : on obtient exactement le même résultat pour des dérivations droites.

⋆Exercice 6

Grammaires linéaires

On dit qu'une grammaire est linéaire si chaque règle ne contient qu'un seul symbole non terminal au plus. On dit qu'elle est linéaire à droite si le symbole non terminal se situe nécessairement à la fin du mot produit.

1. Démontrer que tout langage régulier est engendré par une grammaire linéaire à droite.
2. Démontrer que tout langage engendré par une grammaire linéaire à droite est régulier.